

# Elementy topologii kombinatorycznej

Michał Miśkiewicz  
[mimuw.edu.pl/~mis](http://mimuw.edu.pl/~mis)  
[m.miskiewicz@mimuw.edu.pl](mailto:m.miskiewicz@mimuw.edu.pl)

11–13 kwietnia 2025

## 1 Charakterystyka Eulera sfery

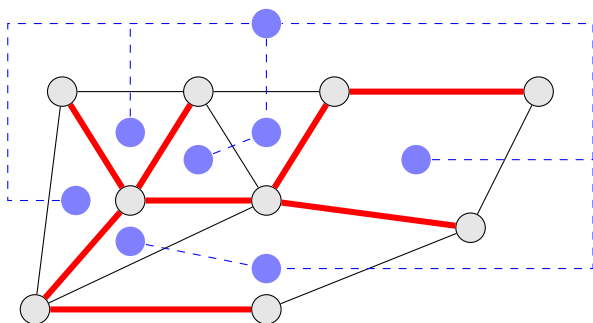
- Będziemy używać liter  $V, E, F$  na oznaczenie liczby wierzchołków, krawędzi i ścian (z ang. *vertices, edges, faces*) czy to wielościanu, czy to siatki złożonej z wielokątów.

**Zadanie 1.1.** Policzyc liczbę wierzchołków, krawędzi i ścian ( $V, E, F$ ) dla pięciu wielościanów foremnych oraz ostrosłupa i graniastoslupa o  $n$ -kątnej podstawie. Następnie dla każdej z tych brył wyznaczyć charakterystykę Eulera  $V - E + F$ .

**Zadanie 1.2.** Uzasadnic, że w siatce złożonej z trójkątów liczba krawędzi  $E$  i liczba ścian  $F$  spełnia równość  $2E = 3F$ .

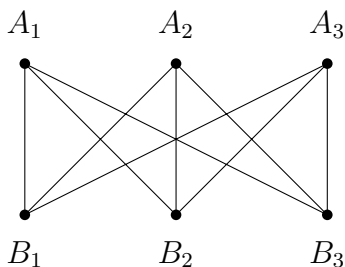
*Wskazówka.* Wyznaczyć liczbę par  $(e, f)$ , w których  $e$  jest krawędzią ściany  $f$ .

**Zadanie 1.3.** W grafie planarnym wybrano drzewo rozpinające, czyli spójny i pozbawiony cykli podgraf  $\mathcal{D}$  o tych samych wierzchołkach i wybranych krawędziach. Uzasadnic, że:



- (a) drzewo  $\mathcal{D}$  ma  $V - 1$  krawędzi;  
 (b) jeśli w grafie dualnym stworzymy podgraf  $\mathcal{D}'$  poprzez wybranie krawędzi nie należących do  $\mathcal{D}$ , to  $\mathcal{D}'$  również jest drzewem rozpinającym;  
 (c)  $V - E + F = 2$ .

**Zadanie 1.4.**

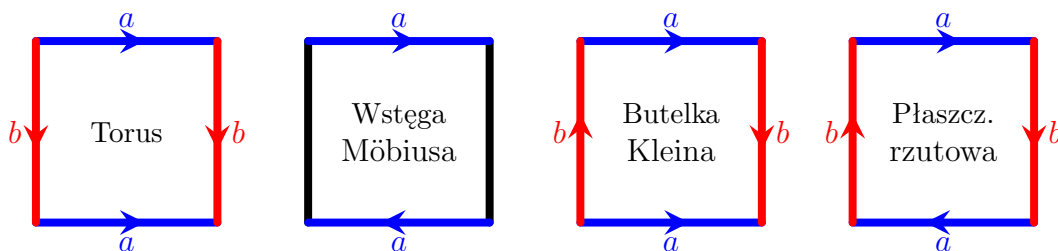


Rozważmy graf dwudzielny  $K_{3,3}$  o (sześciu) wierzchołkach  $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$  i (dziewięciu) krawędziach łączących każdy z  $A_1, A_2, A_3$  z każdym z  $B_1, B_2, B_3$ . Wykazać, że takiego grafu nie da się narysować na sferze (czy też na płaszczyźnie) bez samoprzecięć.

*Wskazówka.* Uzasadnic, że w takiej siatce ściany byłyby co najmniej czworokątne, i naśladując Zadanie 1.2, wyprowadzić stąd nierówność  $2E \geq 4F$ .

## 2 Powierzchnie otrzymane przez sklejenie

- Sklejając wielokąty, można uzyskać różne *powierzchnie*, czasem abstrakcyjne.
- Bez straty ogólności można przyjąć, że tymi wielokątami są trójkąty. Wybór trójkątnej siatki na powierzchni nazywamy jej *triangulacją*.
- *Charakterystykę Eulera*  $\chi(\mathcal{M})$  danej powierzchni  $\mathcal{M}$  definiujemy jako liczbę  $V - E + F$ . Można dowieść, że wielkość ta nie zależy od wybranej siatki, a jedynie od powierzchni, ale o tym później.



**Zadanie 2.1.** Dla każdej z powierzchni powyżej wyznaczyć charakterystykę Eulera, dokonując dogodnego wyboru triangulacji i obliczając  $\chi(\mathcal{M}) = V - E + F$ .

**Zadanie 2.2.** Narysować graf dwudzielny  $K_{3,3}$  na torusie, unikając samoprzecięć.

**Zadanie 2.3.** Sumę spójną  $\mathcal{M} \# \mathcal{N}$  dwóch powierzchni  $\mathcal{M}, \mathcal{N}$  tworzymy, wycinając po jednym trójkącie z każdej z nich, a następnie sklejając brzegi tych dwóch trójkątów. Wyprowadzić wzór na charakterystykę Eulera sumy spójnej:

$$\chi(\mathcal{M} \# \mathcal{N}) = \chi(\mathcal{M}) + \chi(\mathcal{N}) - 2.$$

**Zadanie 2.4.** Torus bywa też nazywany preclm (ozn.  $P_1$ ). Dwuprecla  $P_2$  definiujemy jako sumę spójną dwóch precli  $P_1 \# P_1$ . Ogólnie,  $n$ -precla definiujemy jako sumę spójną  $n$  precli, lub też indukcyjnie wzorem  $P_{n+1} := P_n \# P_1$  (czyli  $n$ -precla z doklejoną jeszcze jedną rączką). Wyznaczyć charakterystykę Eulera  $n$ -precla:  $\chi(P_n) = 2 - 2n$ .

*Wskazówka.* Skorzystać z Zadania 2.3.

**Zadanie 2.5.** Dana jest powierzchnia  $A$  z brzegiem  $\partial A$ . *Dublet* tej powierzchni tworzymy, biorąc dwa egzemplarze  $A$  i sklejając je wzdłuż wspólnego brzegu  $\partial A$ . Jaki kształt ma dublet, gdy  $A$  jest:

- dyskiem?
- powierzchnią boczną walca?
- wstęgą Möbiusa?

**Zadanie 2.6.** Wyznaczyć wzór na charakterystykę Eulera dubletu  $D$ :

$$\chi(D) = 2 \cdot \chi(A) - \chi(\partial A).$$

**Zadanie 2.7.** Udowodnić, że charakterystyka Eulera płaszczyzny rzutowej  $V - E + F$  wynosi 1 niezależnie od wyboru triangulacji.

*Wskazówka.* Płaszczyzna rzutowa powstaje przez sklejenie antypodycznych par punktów na sferze. Wykorzystać to, by każdej jej triangulacji przyporządkować „dwa razy większą” triangulację sfery.

**Zadanie 2.8.** Dla poniższych powierzchni znaleźć „wypełnienie”, czyli trójwymiarową bryłę (być może abstrakcyjną), której brzegiem jest dana powierzchnia:

- (a) sfera
- (b) torus
- (c) butelka Kleina

*Uwaga.* Butelkę Kleina da się wypełnić! (wbrew niektórym opiniom w internecie)

**Zadanie 2.9.** ★ Dla trójwymiarowych figur pociętych na czworościany również definiujemy charakterystykę Eulera:  $\chi(\mathcal{M}) = V_0 - V_1 + V_2 - V_3$ , przy czym wartości  $V_1, V_2, V_3, V_4$  zliczają odpowiednio wierzchołki, krawędzie, trójkąty i czworościany. Wykazać, że jeśli figura  $\mathcal{M}$  nie ma brzegu i jest odpowiednio regularna (tzn. przepis sklejanania nie tworzy osobliwości), to  $\chi(\mathcal{M}) = 0$ .

*Uwaga.* Zainteresowanych dowodem odsyłam do mojego artykułu [Oblicza dualności z Delty 4/2023](#).

**Zadanie 2.10.** Udowodnić, że płaszczyzna rzutowa nie posiada „wypełnienia”.

*Wskazówka.* Rozważyć charakterystykę Eulera dubletu owego wypełnienia.

### 3 Homologie sympleksyjne – wprowadzenie

- Zbiory wierzchołków, krawędzi i ścian oznaczmy odpowiednio  $\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{F}$ . Liczności tych zbiorów to nadal  $V = |\mathcal{V}|, E = |\mathcal{E}|, F = |\mathcal{F}|$ .
- Obraz funkcji  $p: X \rightarrow Y$  to zbiór jej wartości  $p(X) = \{y \in Y : p(x) = y \text{ dla pewnego } x \in X\}$ , a przeciwobraz punktu  $y \in Y$  przy tej funkcji to zbiór  $p^{-1}(y) = \{x \in X : p(x) = y\}$  wszystkich punktów przechodzących na  $y$ .  
W literaturze podobnego oznaczenia używa się dla przeciwobrazów podzbiorów  $Y$ , jednak tutaj ograniczymy się do przeciwobrazów punktów.
- Rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru  $X$  oznaczamy przez  $2^X$ . *To tylko oznaczenie!* Niemniej prawdą jest, że  $|2^X| = 2^{|X|}$  (tj. zbiór  $n$ -elementowy ma  $2^n$  podzbiorów).

- Dla dwóch zbiorów  $A, B$  ich *różnica symetryczna* to  $A \dot{\div} B = \{x : x \in A \setminus B \text{ lub } x \in B \setminus A\}$ .
- Funkcję  $p: 2^A \rightarrow 2^B$  nazwiemy *liniową*, jeśli

$$p(A_1 \dot{\div} A_2) = p(A_1) \dot{\div} p(A_2) \quad \text{dla } A_1, A_2 \subseteq A.$$

- Definiujemy *pierwszy operator brzegu*  $\partial_1: 2^{\mathcal{E}} \rightarrow 2^{\mathcal{V}}$ :

$$\partial_1(X) = \{v \in \mathcal{V} : v \text{ jest końcem nieparzystej liczby krawędzi należących do } X\}$$

oraz *drugi operator brzegu*  $\partial_2: 2^{\mathcal{F}} \rightarrow 2^{\mathcal{E}}$ :

$$\partial_2(Y) = \{e \in \mathcal{E} : e \text{ jest krawędzią nieparzystej liczby ścian należących do } Y\}.$$

- Dla zadanej powierzchni definiujemy liczby Bettiego  $b_0, b_1, b_2$  jako liczby spełniające

$$2^{b_0} = \frac{|2^{\mathcal{V}}|}{|\partial_1(2^{\mathcal{E}})|}, \quad 2^{b_1} = \frac{|\partial_1^{-1}(\emptyset)|}{|\partial_2(2^{\mathcal{F}})|}, \quad 2^{b_2} = |\partial_2^{-1}(\emptyset)|.$$

Jak się okaże, liczby te mierzą liczbę dziur odpowiedniego wymiaru  $(0, 1, 2)$ .

**Zadanie 3.1.** Przekonać się, że operacja różnicy symetrycznej zbiorów jest przemienne i łączna, to znaczy

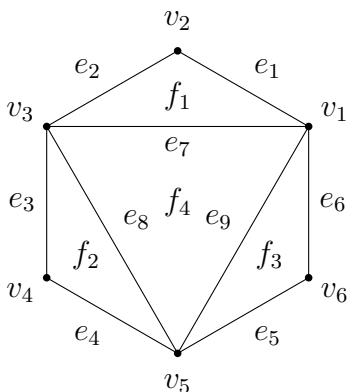
$$A \dot{\div} B = B \dot{\div} A, \quad (A \dot{\div} B) \dot{\div} C = A \dot{\div} (B \dot{\div} C),$$

co pozwala bez ryzyka nieściśłości opuszczać nawiasy i pisać np.  $A \dot{\div} B \dot{\div} C$ . Ponadto wykazać następującą charakteryzację różnicy symetrycznej wielu zbiorów:

$$A_1 \dot{\div} A_2 \dot{\div} \dots \dot{\div} A_n = \left\{ x : x \text{ należy do nieparzystej liczby zbiorów spośród } A_1, A_2, \dots, A_n \right\}.$$

**Zadanie 3.2.** Czym są brzegi  $\partial_1(\{e\})$  i  $\partial_2(\{f\})$  pojedynczej krawędzi lub ściany?

**Zadanie 3.3.**



Na przykładzie obok wyznaczyć brzegi

- $\partial_1(\{e_1\})$
- $\partial_2(\{f_4\})$
- $\partial_1(\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\})$
- $\partial_2(\{f_1, f_2, f_4\})$

**Zadanie 3.4.** Sprawdzić, że operatory brzegu  $\partial_1: 2^{\mathcal{E}} \rightarrow 2^{\mathcal{V}}$ ,  $\partial_2: 2^{\mathcal{F}} \rightarrow 2^{\mathcal{E}}$  są liniowe.

*Wskazówka.* (liniowość  $\partial_1$ ) Dla ustalonych zbiorów  $X, Y \subseteq \mathcal{E}$  i wierzchołka  $v \in \mathcal{V}$  porównać warunki  $v \in \partial_1(X)$ ,  $v \in \partial_1(Y)$  i  $v \in \partial_1(X \dot{\div} Y)$ .

**Zadanie 3.5.** Załóżmy, że  $p: 2^A \rightarrow 2^B$  jest funkcją liniową. Uzasadnić, że  $p$  każdą swoją wartość przyjmuje tyle samo razy, a więc  $|p^{-1}(\emptyset)|$  razy. Wywnioskować, że

$$|2^A| = |p(2^A)| \cdot |p^{-1}(\emptyset)|.$$

*Wskazówka.* Równość zbiorów  $A_1 = A_2$  jest równoważna równości  $A_1 \div A_2 = \emptyset$ .

**Zadanie 3.6.** Wyprowadzić wzór łączący liczby Bettiego z charakterystyką Eulera:

$$b_0 - b_1 + b_2 = V - E + F = \chi(\mathcal{M}).$$

*Wskazówka.* Wykorzystać Zadanie 3.5 do zbadania wielkości  $\frac{2^{b_0} \cdot 2^{b_2}}{2^{b_1}}$ .

**Zadanie 3.7.** Uzasadnić, że jeśli  $p: 2^A \rightarrow 2^B$  jest funkcją liniową, to liczby  $|p(2^A)|$  i  $|p^{-1}(\emptyset)|$  są potęgami dwójki.

*Wskazówka.* Wykorzystać Zadanie 3.5.

*Uwaga.* Wynika stąd, że liczby Bettiego  $b_0, b_1, b_2$  są całkowite.

**Zadanie 3.8.** Przekonać się, że  $\partial_1(\partial_2(\mathcal{F}')) = \emptyset$  dla dowolnego podzbioru  $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ .

*Wskazówka.* Sprawdzić powyższy warunek dla zbioru jednoelementowego  $\mathcal{F}' = \{f\}$ , następnie oprzeć się na liniowości złożenia  $\partial_1\partial_2$ .

*Uwaga.* Wynika stąd, że liczby Bettiego  $b_0, b_1, b_2$  (zwłaszcza  $b_1$ ) są nieujemne.

## 4 Homologie sympleksyjne powierzchni

**Zadanie 4.1.** Wykazać, że jeśli  $\mathcal{M}$  jest spójną powierzchnią, to obraz  $\partial_1(2^{\mathcal{E}})$  jest rodziną wszystkich parzystoelementowych podzbiorów  $2^{\mathcal{V}}$ . Wywnioskować, że  $b_0(\mathcal{M}) = 1$ .

*Wskazówka.* Jest jasne, że  $\partial_1(\{e\})$  jest zbiorem dwuelementowym. Nietrudno też uzasadnić, że każdy dwuelementowy podzbiór  $\mathcal{V}$  jest brzegiem pewnego zbioru krawędzi (jakiego?). W ogólnym przypadku zastosować indukcję.

**Zadanie 4.2.** Wykazać, że jeśli  $\mathcal{M}$  jest spójną powierzchnią bez brzegu, to funkcja  $\partial_2$  przyjmuje wartość  $\emptyset$  dla dokładnie dwóch zbiorów:  $\emptyset$  oraz  $\mathcal{F}$ . Wywnioskować, że  $b_2(\mathcal{M}) = 1$ .

*Wskazówka.* Uzasadnić, że jeśli zbiór  $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$  zawiera jakąś ścianę i spełnia  $\partial_2(\mathcal{F}') = \emptyset$  (czyli ma pusty brzeg), to zawiera też wszystkie ściany sąsiednie.

**Zadanie 4.3.** Pokazać, że jeśli  $\mathcal{M}$  jest spójną powierzchnią bez brzegu, to jej charakterystyka Eulera  $\chi_{\mathcal{M}} = V - E + F$  nie przekracza 2.

*Wskazówka.* Skorzystać z Zadania 3.6.

**Zadanie 4.4.** Jeśli  $\mathcal{M}$  jest spójną powierzchnią z brzegiem (jak np. koło lub wstęga Möbiusa), to  $b_2(\mathcal{M}) = 0$ .

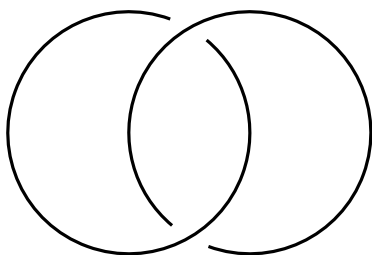
*Wskazówka.* Powtórzyć rozumowanie z Zadania 4.2. Z jedną drobną różnicą: czym jest  $\partial_2(\mathcal{F})$ ?

**Zadanie 4.5.** Wyznaczyć liczby Bettiego  $n$ -precla:

$$b_0(P_n) = 1, \quad b_1(P_n) = 2n, \quad b_2(P_n) = 1.$$

*Wskazówka.* Skorzystać z wyników Zadań 2.4, 4.1 i 4.2.

**Zadanie 4.6.**



Przykład nietrywialnego splotu

(pierścienie Boromeuszy) Skonstruować trzy pętle  $A, B, C$  w przestrzeni trójwymiarowej spełniające następujące dwa warunki:

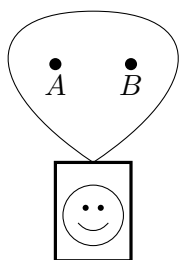
- tworzą nietrywialny splot (tzn. np. pętli  $C$  nie można *wyjąć* na zewnątrz);
- każda para tworzy splot trywialny (tzn. np. po usunięciu  $C$  pętle  $A$  i  $B$  można *rozdzielić*).

**Zadanie 4.7.** Niech  $A, B, C$  będą pętlami z poprzedniego zadania. Skonstruować powierzchnię rozpiętą na pętli  $C$  (tzn. mającą  $C$  jako swój brzeg), rozłączną z pętlami  $A$  i  $B$ .

*Uwaga.* Z warunku (a) wynika, że taka powierzchnia nie może mieć kształtu koła.

*Wskazówka.* Zacząć od koła rozłącznego z  $A$  i zmodyfikować je tak, by otrzymać powierzchnię rozłączną również z  $B$ .

**Zadanie 4.8.**



Przykład niewłaściwie zawieszonych obrazu

W ścianę wbite są dwa gwoździe  $A$  i  $B$ . Używając pętli ze sznurka, chcemy powiesić na nich obraz, spełniając przy tym dwa warunki:

- póki oba gwoździe są w ścianie, obraz wisi;
- jeśli którykolwiek z gwoździ wypadnie ze ściany, obraz spada.

*Wskazówka.* Matematyczne jądro problemu jest takie samo jak w Zadaniu 4.6. Warto spróbować przenieść rozwiązanie jednego z tych zadań do drugiego.

## 5 Dalsza lektura

### Odnośniki

- Główny wątek warsztatów jest oparty na moich artykułach w *Delcie*: [Z butelki Kleina i Salomon nie należy?](https://deltami.edu.pl/2023/03/z-butelki-kleina-i-salomon-nie-naleje/), [Oblicza dualności](https://deltami.edu.pl/2023/04/oblicza-dualnosci/) oraz [O trójkątach \(nie tylko\) na sferze](https://deltami.edu.pl/2020/03/o-trojkatkach-nie-tylko-na-sferze/).

<https://deltami.edu.pl/2023/03/z-butelki-kleina-i-salomon-nie-naleje/>

<https://deltami.edu.pl/2023/04/oblicza-dualnosci/> <https://deltami.edu.pl/2020/03/o-trojkatkach-nie-tylko-na-sferze/>

- Więcej o wzorze Eulera można przeczytać w *Delcie*. Artykuły Joanny Jaszuskiej  [\$W - K + S = 2\$](https://www.deltami.edu.pl/2016/03/w-k-s-2/)  oraz [Domki i studnie](https://www.deltami.edu.pl/2011/08/domki-i-studnie/) zawierają wiele pouczających a nietrudnych zadań. W artykule Witolda Sadowskiego [Wzór Eulera i balony](https://deltami.edu.pl/2005/09/wzor-eulera-i-balony/) można za to przeczytać o twierdzeniu Gaussa-Bonnetta, które łączy charakterystykę Eulera z krzywizną.

<https://www.deltami.edu.pl/2016/03/w-k-s-2/>

<https://www.deltami.edu.pl/2011/08/domki-i-studnie/>

<https://deltami.edu.pl/2005/09/wzor-eulera-i-balony/>

- Na kanałach 3Blue1Brown ([Why this puzzle is impossible](https://www.youtube.com/watch?v=VvCytJvd4H0)) i Vihart ([Four Utilities Puzzle \(and how to ruin a bagel\)](https://www.youtube.com/watch?v=CruQy1WSfoU)) można zobaczyć omówienie zadania z narysowaniem grafu  $K_{3,3}$  na torusie (w formie kubka lub donuta).

<https://youtu.be/VvCytJvd4H0>

<https://youtu.be/CruQy1WSfoU>

- Na stronie [Twenty-one Proofs of Euler's Formula:  \$V - E + F = 2\$](https://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/euler/)  można znaleźć 21 dowodów wzoru Eulera. Ten przedstawiony tutaj ma numer 1 – jest on też przedstawiony w artykule Jana Rempały [Jeszcze raz o wzorze Eulera, czyli zastosowanie stawów i grobli w stereometrii](https://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/euler/), jak również w filmie na kanale 3Blue1Brown [Euler's Formula and Graph Duality](https://www.youtube.com/watch?v=-90Uyo8NFZg).

<https://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/euler/> <https://deltami.edu.pl/1976/01/jeszcze-raz-o-wzorze-eulera-czyli-zastosowanie-stawow-i-grobli-w-stereometrii/>

<https://youtu.be/-90Uyo8NFZg>

- Zastosowanie liczb Bettiego do zrozumienia struktury połączeń w mózgu ilustrują trzy filmy na kanale PBS Infinite Series [Simplicial Complexes – Your Brain as Math](https://www.youtube.com/watch?v=MOM3srBoTkY) (zwłaszcza część druga)

<https://youtu.be/MOM3srBoTkY> (część 1)

<https://youtu.be/r1I1K0o1gp4> (część 2)

<https://youtu.be/akgU8nRNip0> (część 3)

- Zainteresowanym tematyką topologii kombinatorycznej (czy też algebraicznej) polecam książkę Władimira Boltianskiego i Wadima Efremowicza [Intuitive Combinatorial Topology](https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4757-5604-3). Świetnym – ale już dużo bardziej zaawansowanym – źródłem jest książka Alana Hatchera [Algebraic Topology](https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html), dostępna bezpłatnie na stronie autora.

<https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4757-5604-3>

<https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html>

## Wyjaśnienia terminologiczne i nie tylko

– *Topologia kombinatoryczna* to historyczna nazwa tej dyscypliny, wskazująca na użycie metod kombinatorycznych. Obecnie używa się nazwy *topologia algebraiczna*.

– W co najmniej jednym miejscu (przy problemie grafu  $K_{3,3}$ ) milcząco powołaliśmy się na twierdzenie Jordana: każda krzywa zamknięta bez samoprzecięć dzieli płaszczyznę na dokładnie dwa obszary (analogicznie jest dla krzywych na sferze). To ciekawe twierdzenie – potrzebę jego zastosowania łatwo przeoczyć, ale samo twierdzenie już nie jest takie łatwe.

– Obiekt, który tutaj nazywałem trójkątną siatką lub triangulacją (zresztą bez podania ścisłej definicji), w literaturze odpowiada kompleksowi sympleksjalnemu lub  $\Delta$ -kompleksowi. Aby taki kompleks opisywał powierzchnię, należy zadać pewne dodatkowe warunki: każda krawędź musi należeć do jednej lub dwóch ścian, a ściany stykające się w jednym wierzchołku muszą układać się w cykl kolejnych sąsiadujących ścian.

– Podzbiory zbioru  $A \subseteq X$  odpowiadają jednoznacznie funkcjom  $f: X \rightarrow \{0, 1\}$  (kładziemy  $f(x) = 1$  dla  $x \in A$  i  $f(x) = 0$  wpp.). Jeśli umówimy się, że liczby 0, 1 dodajemy i mnożymy modulo 2 (zbiór  $\{0, 1\}$  z tymi działaniami przyjęło się oznaczać przez  $\mathbb{Z}_2$ ), to funkcje  $f: X \rightarrow \{0, 1\}$  tworzą przestrzeń liniową nad  $\mathbb{Z}_2$ . Operacja różnicy symetrycznej dwóch zbiorów  $A_1 \div A_2$  odpowiada przy tym sumie odpowiednich funkcji  $f_1 + f_2$ .

– Czym są homologie? Jak się przekonałiśmy, zachodzi zawieranie  $\partial_2(\mathcal{F}) \subseteq \partial_1^{-1}(\emptyset)$ . Pierwszą grupę homologii otrzymujemy, biorąc zbiór  $\partial_1^{-1}(\emptyset)$  i utożsamiając elementy różniące się o coś z  $\partial_2(\mathcal{F})$ , czyli  $A \sim B \iff A \div B \in \partial_2(\mathcal{F})$ . *Pierwsza* odnosi się do tego, że krawędzie mają wymiar 1, podobną konstrukcję można przeprowadzić dla ścian etc.

W terminach przestrzeni funkcji  $f: 2^{\mathcal{E}} \rightarrow \mathbb{Z}_2$  powiedzielibyśmy, że zachodzi zawieranie  $\text{im } \partial_2 \subseteq \ker \partial_1$  między obrazem  $\partial_2$  a jądrem  $\partial_1$  (to jest terminologia używana dla funkcji liniowych). W języku technicznym konstrukcja wyżej opisuje przestrzeń ilorazową  $\ker \partial_1 / \text{im } \partial_2$ . Liczba Bettiego  $b_1$  jest wtedy po prostu wymiarem tej przestrzeni ilorazowej.

– W miejsce  $\mathbb{Z}_2$  można wybrać inne współczynniki – popularnym wyborem są liczby całkowite  $\mathbb{Z}$  lub rzeczywiste  $\mathbb{R}$ . Odrobinę więcej uwagi wymaga wtedy określenie operatorów brzegu. Standardowa definicja liczb Bettiego  $b_i = \dim_{\mathbb{R}} \ker \partial_i / \text{im } \partial_{i+1}$  korzysta ze współczynników w  $\mathbb{R}$ , co różni się od użytych tutaj liczb  $b_i$  określonych dla  $\mathbb{Z}_2$  (jako przykład warto rozważyć płaszczyznę rzutową).

– Liczba Bettiego  $b_1$  w pewnym sensie zlicza nieściągalne pętle, ale z jednym zastrzeżeniem, które dobrze ilustrują pierścienie Boromeuszy. Otóż pętla jest ściągalna, gdy da się na niej rozpiąć koło; równoważnie, jeśli jest brzegiem pewnego koła. Tymczasem (w opisie wyżej) wkładu w  $b_1$  nie mają pętle będące brzegami dowolnych powierzchni. Różnicę między tymi dwoma warunkami opisuje ściśle twierdzenie Hurewicza: pierwsza grupa homologii jest abelianizacją grupy pętli. Niestety, samo wyjaśnienie tych terminów zajęłoby trochę czasu.